EPFL

Ens: D. Strütt
Analyse I - XXX
Novembre 2022
1 heure

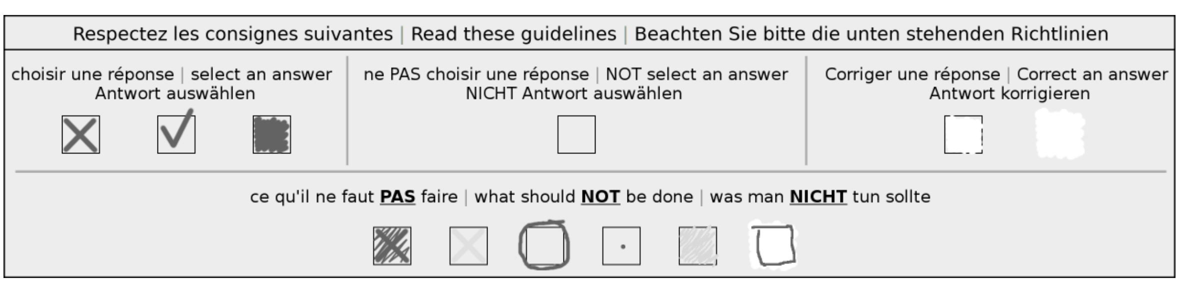
243

XXX-1

SCIPER : **FAKE-1**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages (les dernières pouvant être vides), et 13 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $a_n = \dfrac{(-2)^n (n!)^2}{(2n)!}$. Alors la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est:

- ☐ divergente car $|a_n| \to +\infty$
- ☐ divergente car $|a_n| \to 1$
- ☐ absolument convergente
- ☐ convergente mais pas absolument convergente

Question 2 : Soit $z = \dfrac{2\,\mathrm{i}^9 - 4\,\mathrm{i}^{15}}{1-\mathrm{i}}$. Alors:

- ☐ $z^6 = -8 \cdot 3^6\,\mathrm{i}$
- ☐ $z^6 = 8 \cdot 3^6$
- ☐ $z^6 = 8 \cdot 3^6(1+\mathrm{i})$
- ☐ $z^6 = 8 \cdot 3^6\,\mathrm{i}$

Question 3 : Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 3$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + 2$. Alors:

- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 3$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 8$
- ☐ $(x_n)_{n\geq 0}$ diverge

Question 4 : La limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{2n - \sqrt{3n}}}}$

- ☐ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$
- ☐ existe et vaut 1
- ☐ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{6}}$
- ☐ n'existe pas

Question 5 : Soit $A = \left\{y \in \mathbb{R} :\ \exists x \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } y = e^{-x}\right\}$. Alors

- ☐ $\operatorname{Inf} A = 1$
- ☐ $\operatorname{Sup} A = 1$
- ☐ $\operatorname{Sup} A = \mathrm{e}$
- ☐ A n'est pas majoré

Question 6 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}\,.$$

Alors :

- ☐ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
- ☐ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Question 7 : Soit la série avec paramètre $b \in \mathbb{R}$ définie par :

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2b + \frac{1}{k}\right)^k$$

Alors s converge si et seulement si :

☐ $b \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ ☐ $b \leq \frac{1}{2}$ ☐ $b \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ☐ $b < \frac{1}{2}$

Question 8 : Dans les nombres complexes une solution de l'équation $z^4 + (4 + 3\mathrm{i})^2 = 0$ est :

☐ $z = 2 + \mathrm{i}$ ☐ $z = (4 + 3\mathrm{i})/2$ ☐ $z = 1 - 2\mathrm{i}$ ☐ $z = 2 - \mathrm{i}$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Alors $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Il existe une fonction bijective et continue $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 : Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, il existe une infinité de nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}(\omega z) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide, et soit $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Si A est majoré, alors B est majoré.

☐ VRAI ☐ FAUX